

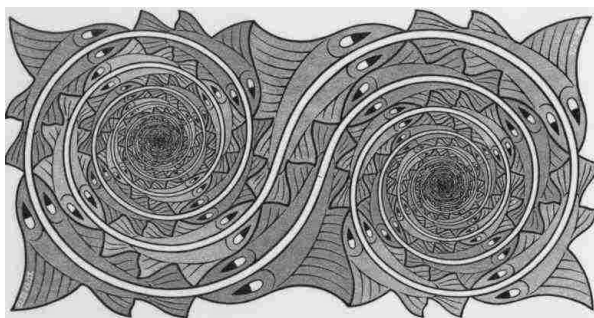
## Aspekte der Unendlichkeit

### Fächerverbindender Unterricht Mathematik - Religion

#### Eine Unterrichtseinheit in Klasse 10/11

Autor: Jörg Rudolf, geb. 1968, Studium der Fächer Mathematik, Physik und kath. Religion, unterrichtet am Kolleg St. Blasien

Email: [j.rudolf@web.de](mailto:j.rudolf@web.de). Homepage: [www.rudolf-web.de](http://www.rudolf-web.de)



[Abbildung 1: M. C. Escher: 'Drehstrudel']

**Hilbert, David:** *Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt der Menschen bewegt. Das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend gewirkt. Das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff der Aufklärung bedürftig.*

Das vorangestellte Zitat mag etwas von der Faszination vermitteln, die Menschen immer wieder in der Auseinandersetzung mit dem Unendlichen erfahren haben. Deshalb scheint es mir möglich und erstrebenswert, auch die Schülerinnen und Schüler einer 10. oder 11 Klasse im fächerverbindenden Unterricht mitzunehmen auf eine Reise, auf der das Ringen des menschlichen Geistes um das Unendliche sichtbar wird.

#### 1. Inhalte im fächerverbindenden Unterricht

Im Mittelpunkt dieser Unterrichtseinheit steht die „Unendlichkeit“ - ein zentraler Begriff sowohl in der Philosophie als auch in der Mathematik, der auch im religiösen Kontext unser Reden von Gott tangiert. Geschichtlich bedeutsame Problemstellungen - personal verankert an Zenon, Aristoteles, Pascal, Cauchy, Cantor und Hilbert - bilden das Rückgrat dieser Einheit. Ausgehend von den Überlegungen Pascal und den mathematischen Leistungen Cantors kann durch die Beschäftigung mit der Unendlichkeit auch die innere Ruhelosigkeit erfahrbar gemacht werden, die bei Goethe geradezu die Vorbedingung der endgültigen Rettung Fausts darstellt: „Wer immer strebend sich bemüht, den können wir erlösen.“ (VV. 11936f in Faust II.). Da in dieser Welt das Streben des Menschen keine letzte Erfüllung finden kann, bildet die menschliche Vernunft einen ganz anderen Begriff des Unendlichen: das aktual Unendliche.

Im Zentrum mathematischen Redens von Unendlichkeit stehen zwei Begriffe: der Grenzwertbegriff und der Begriff der Mächtigkeit. Eine Ausweitung hat der Grenzwertbegriffs in der fraktalen Geometrie erfahren, in der der Grenzwert von Punktmengen betrachtet wird. Das staunenswerte Verhalten der „Selbstähnlichkeit“ von Fraktalen steht im Widerspruch zu Euklids Axiom „Das Ganze ist größer als sein Teil“. Gerade die Abänderung dieses Axioms führt im Rahmen der Mengenlehre zu einer Definition der Unendlichkeit: *Eine Menge hat unendlich viele Elemente, wenn sie zu einer echten Teilmenge gleichmächtig ist.*

Darauf aufbauend bildete Georg Cantor eine völlig neue Zahl:  $\omega$ , eine aktual unendliche Zahl und weiter die transfiniten Ordinalzahlen  $\omega + 1$ ,  $\omega + 2$ , ... Mit dem Beweis der Abzählbarkeit der rationalen Zahlen und der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen erwies Cantor die Tragfähigkeit seiner Begriffsbildungen. Ihm gelang die Strukturierung des Unendlichen, indem er die unendlichen Kardinalzahlen  $\aleph_1$ ,  $\aleph_2$ ,  $\aleph_3$ , ... einführte.

## 2. Die Umsetzung der Einheit

Die o. e. verschiedenen Dimensionen der Unendlichkeit erfordern auf Schülerseite die Offenheit, sich unter unterschiedlichen Blickwinkeln mit dem Thema auseinander zu setzen. Für die Durchführung dieser anspruchsvollen Unterrichtseinheit bieten sich eine Fülle von Methoden und Materialien an, z. B. als motivierenden Einstieg eine Bildbetrachtung (M. C. Escher: Drehstrudel), ein Fragebogen zum Vorwissen sowie eine Traumreise mithilfe der Folienreihe „10 Hoch“. Historisch anregende Paradoxien können in Gruppenarbeit bearbeitet werden, Zenons Paradoxon wird vorgespielt, das Problem der alternierenden Summe (mit den mutmaßlichen drei Lösungen 0, 1 und  $1/2$ ) wird in einem Wettbewerb unter dem Vorsitz von Cauchy gelöst. Indem die Lernenden Fraktale selbst zeichnen, erfahren sie auch manuell, was sich hinter dem Grenzwertbegriff und der Unterscheidung zwischen potentiell und aktual unendlich verbirgt. Die existentiellen Erfahrungen Pascals korrespondieren mit den Erlebnissen der Lerngruppe aus ihrer eigenen „Reise in die Unendlichkeit“. Cantors Leistungen - inklusive dem ersten Diagonalverfahren - können an dem Beispiel vom „Hotel Unendlich“ (vgl. z. B. mathematiklehren, Heft 31, S. 7) veranschaulicht werden, seine Entdeckung der „Superunendlichkeit“ lässt sich in ein „faustisches Drama“ (erhältlich auf der Homepage des Autors unter [www.rudolf-web.de](http://www.rudolf-web.de)) verpacken, indem der Beweis durch Widerspruch der Überabzählbarkeit in einen Dialog zwischen Faust und Mephisto erbracht wird. Dieses stete Streben des Menschen, das Goethe in seinem „Faust“ so eindrucksvoll beschreibt, kann auch von den Schülern nachempfunden werden: Indem sie einen Brief an sich selbst schreiben zum Thema „Welche Wünsche und Sehnsüchte habe ich? Werde ich zufrieden sein, wenn diese erfüllt sind?“, der erst nach z. B. einem halben Jahr geöffnet wird. Dabei wächst beim Schreiben die Erkenntnis, dass es gerade zum Wesen des Menschen gehört, immer weiter zu streben: Die potentielle Unendlichkeit des Menschen, einer der Ansatzpunkte für die Religiosität des Menschen. Ein Fragebogen zum Abschluss ersetzt die schriftliche Leistungsüberprüfung und bietet die Gelegenheit zur Reflexion des Gelernten.

Unter alleiniger Nennung von Personennamen und Oberbegriffen sei noch auf weitere anregende Themen aus der Astronomie (moderne Weltbilder, Giordano Bruno, Albert Einstein, Olbers Paradoxon), der Philosophie (Platon: Phaidon, Cusanus: Koinzidentia oppositorum, Descartes: Gottesbeweis aus der 3. Meditation, Kant: Antinomien der reinen Vernunft), im Bereich der Religion (Gottesbeweise, Unsterblichkeit, Ewigkeit) und aus der Mathematik (Bolzano: 'Paradoxien', projektive Geometrie: 'unendlich fern', Infinitesimalrechnung - Kegelschnitte, Indivisiblen, Zahlentheorie) hingewiesen.

### Literatur / Software / Folien / Internet

Komarow, W. N.: Auf den Spuren des Unendlichen. Harri Deutsch, Frankfurt 1978.

Lauwerier, H.: Unendlichkeit. Denken im Grenzenlosen. Rowohlt, 1993.

Maor, Eli: To Infinity and Beyond. A Cultural History of the Infinite. Birkhäuser, Stuttgart 1986.

*(Diese Bücher sind überaus empfehlenswert. Die umfassendste und ansprechendste Darstellung findet sich bei Maor.)*

FRACTINT: als Freeware erhältlich über <http://spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html>

Folienreihe „10 Hoch“: erhältlich z. B. über das Religionspädagogische Seminar Regensburg, Niedermünstergasse 2 [www.rudolf-web.de](http://www.rudolf-web.de) : ausführlicheres Literaturverzeichnis, eine detaillierte Beschreibung dieser Unterrichtssequenz mit weiteren Kopiervorlagen und einer Linkliste zum Thema

## Übersicht über philosophische Positionen

**Vorsokratiker (600 - 400 v. Chr.):** Sie waren die ersten Philosophen, die sich - ausgehend von der Frage nach dem Urstoff bzw. der „arche“, dem Ursprung alles Seienden - mit dem Begriff „Unendlichkeit“ beschäftigt haben.

*Anaximander von Milet (610 - 546 v. Chr.):* Er führte als erster den Begriff „apeiron“ (griechisch: unendlich; auch: Urstoff) ein: „Ursprung der Dinge ist das Unendliche“.

*Anaxagoras (500 - 428 v. Chr.):* Er hatte den Gedanken der Unendlichkeit bereits auf die Formel gebracht: „Denn weder gibt es beim Kleinen ja ein Kleinstes, sondern es gibt stets ein noch Kleineres ... aber auch beim Großen gibt es kein Größtes“.

*Demokrit (etwa 460 - 370 v. Chr.):* Bezüglich des Kleinen vertritt er die Gegenposition: er meinte, es sei unmöglich, einen Körper unendlich oft zu teilen, sondern nur bis zu den unteilbaren Atomen.

*Zenon der Eleate (etwa 490 - 430 v. Chr.):* Er zeigte mit seinen unsterblichen Paradoxien von „Achill und Schildkröte“ und vom „fliegenden Pfeil“, dass beide Konzeptionen, sowohl die der unendlichen Teilbarkeit als auch die der unteilbaren Teilchen, zu Widersprüchen führen.

**Aristoteles (384 - 322 v. Chr.):** gelang mit der Unterscheidung zwischen dem potentiell und dem aktual Unendlichen eine äußerst bedeutsame begriffliche Fassung. Aber auch Aristoteles erkannte: „Es ergibt sich viel Unmögliches, mag man annehmen, dass das Unendliche nicht existiere oder dass es existiere.“

**Aurelius Augustinus (354 - 430):** In seinen „Bekennnissen“ findet sich der Satz: „Unruhig ist unser Herz, bis es Ruhe findet in dir“. Damit beschreibt er den Menschen als ein Wesen, dessen Streben in dieser Welt keine letzte Erfüllung finden kann.

**Anselm von Canterbury (1033 - 1109):** Sein Motto lautete: „fides quaerens intellectum“ (Der Glaube, der nach Einsicht sucht). Diesen Weg geht Anselm im sogenannten „ontologischen Gottesbeweis“. Bei aller Kritik an diesem Vorgehen bleibt auf jeden Fall das großartige Ringen um einen angemessenen Begriff Gottes: „Etwas, worüber hinaus nichts Größeres gedacht werden kann.“ Anselm trifft in seinem „Beweis“ auch eine Aussage über den Menschen, genauer über das menschliche Denken, das sich durch nichts Endliches aufhalten lässt und über alles Vorgegebene hinaus schreitet.

**Blaise Pascals (1623 - 1662):** Die philosophischen Überlegungen waren durch seine vielfältigen Forschungen in den unterschiedlichsten Bereichen (Mathematik, Physik, Technik, Theologie und Philosophie) geprägt. Durch die technische Entwicklung von Mikroskop und Fernrohr drang der Mensch immer weiter in den Mikro- und Makrokosmos ein. In seinem Nachdenken über den Menschen erkannte Pascal: „Denn was ist schließlich der Mensch inmitten des Kosmos? Ein Nichts im Vergleich zum Unendlichen, ein Alles im Vergleich zum Nichts: eine Mitte zwischen Nichts und All.“ Dies macht die Größe und das Elend des Menschen aus. So setzt sich Pascal den beiden Unendlichkeiten existentiell aus und erspürt das „Gefühl der Verlorenheit im endlosen, undurchdringlichen Weltall“, die radikale Ungesicherheit menschlicher Existenz.

**Georg Cantor (1845 - 1918):** „Wenn man von der Endlichkeit des Verstandes spricht ... setzt man stillschweigend voraus, dass seine Fähigkeiten zur Bildung von Zahlen auf die endlichen Zahlen beschränkt ist. Wenn es sich jedoch erweist, dass der Verstand in der Lage ist, in gewissen Sinne unendliche Zahlen zu bestimmen und von einander zu unterscheiden, so muss man dem menschlichen Verstand das Prädikat 'unendlich' zuschreiben, was meiner Meinung nach allein richtig ist. Wie beschränkt auch die menschliche Vernunft ist, so ist doch viel vom Unendlichen hängen geblieben.“



## Potentiell - aktual unendlich

Aristoteles unterscheidet zwischen: potentiell unendlich und aktual unendlich.

Ordne folgende Definitionsversuche und Beispiele diesen beiden Unendlichkeiten zu:

	potent. unendlich	aktual unendlich
Es gibt immer einen Nachfolger		
Es gibt immer etwas Extremes		
Es gibt keine Schranken		
Etwas, worüber hinaus nichts Größeres gedacht werden kann		
Die Menge der natürlichen Zahlen		
Der mathematische Punkt		
Anzahl der Ecken eines Kreises		
Gott		

## Fraktale Geometrie

### a) Zur Küstenlänge Deutschlands und Dänemarks:

Von der West- bis zur Ostgrenze sind es ungefähr 500 km, von Hamburg bis zur Nordspitze Dänemark ebenso 500 km.

(0) Nähere die Küstenlänge durch eine Strecke an

(1) ... durch ein Polygon mit einer Ecke

(2) ... mit zwei Ecken

(3) ... mit drei Ecken

...

(n) ... mit n Ecken

Schätze jeweils die Küstenlängen  $d_1, d_2, d_3, d_4, \dots!$

### b) Zeichne die Kochkurve:

K0: eine Strecke der Länge 1 (zum Zeichnen: 18 cm).

K1: Ersetze das mittlere Drittel durch eine „Spitze“ (zwei Strecken der Länge  $1/3$ ). Du erhältst eine Figur mit vier Strecken der Länge  $1/3$ .

K2: Ersetze bei allen Strecken das mittlere Drittel durch eine Spitze, wobei wieder alle Strecken gleich lang sein sollen.

... (Zeichne mindestens bis K4!)

Berechne die Längen  $k_n$  der Figuren  $K_n$  (der Kochkurve).

## Pascal

„Der Mensch betrachte den gesamten Kosmos in seiner hohen und vollen Majestät; er lenke seinen Blick ab von den ihn umgebenden niedrigen Dingen. Er schaue auf das blendende Licht, das wie eine ewige Lampe hingesezt ist, das All zu erleuchten; die Erde erscheine ihm wie ein Punkt verglichen mit der erhabenen Bahn, den dieses Gestirn beschreibt; und er staune darüber, dass diese weite Bahn auch selbst nur ein winziges Pünktchen ist, verglichen mit jener, durch die die das Firmament durchrollenden Gestirne ziehen. Aber wenn unser Auge hier stockt, so gehe die Einbildungskraft weiter; doch auch sie wird rascher im Auffassen ermüden als die Natur im Spenden. Diese ganze sichtbare Welt ist nur ein unmerklicher Punkt im geräumigen Schoß der Natur. Keine Vorstellung kommt ihr nahe.

Aber um ihm noch ein anderes, ebenso erstaunliches Wunder vorzustellen: er suche nur unter den ihm bekannten Dingen die winzigsten auf. Eine Milbe zeige ihm in der Kleinheit ihres Körpers noch unvergleichlich kleinere Teile, Beine mit Gelenken, Adern in diesen Beinen, Blut in den Adern, Tröpfchen in diesem Blut, Dämpfe in diesen Tröpfchen; nun teile er nochmals diese letzten Dinge, erschöpfe seine Kräfte dabei, sie sich vorzustellen; und der letzte Gegenstand, zu dem er gelangen mag, soll nunmehr derjenige unserer Erörterung sein. Vielleicht wird er denken, er habe das äußerst Kleine der Natur erreicht. Ich will ihm darin einen neuen Abgrund zeigen. ...

Denn was ist schließlich ein Mensch inmitten des Kosmos? Ein Nichts im Vergleich zum Unendlichen, ein All im Vergleich zum Nichts: eine Mitte zwischen Nichts und All. Unendlich davon entfernt, die Extreme geistig einzuholen, sind ihm das Endziel der Dinge wie ihr Ursprung unbezwinglich verborgen in einem undurchdringlichen Geheimnis; er ist gleichermaßen unfähig, das Nichts, aus dem er gezogen ist, zu erkennen wie das Unendliche, das ihn verschlingt.“

Fragen zum Text von Pascal:

- (1) Welche Aussage über die Stellung des Menschen macht Pascal?
- (2) Stimmst Du dieser Aussage zu?

## Reise in die Unendlichkeit

Nach der Lektüre von Pascal-Texten, in der die existenzielle Dimension der Unendlichkeit dargestellt ist, können die Lernenden in Kleingruppen selbst eine „Reise in die Unendlichkeit“ unternehmen: Mit Hilfe eines Computerprogramms (z. B. FRACTINT) zoomen sie z. B. in die Mandelbrotmenge, mittels Farbfolien („10 Hoch“: Reise in den Makro- bzw. Mikrokosmos), mit dem „Spiegelwunder“ (aus dem Buch „Hallo, Mister Gott, hier spricht Anna“), mit Escherbildern oder anderen Darstellungen zur Selbstbezüglichkeit.

Arbeitsauftrag:

- (1) Versuche mit dem vorliegenden Material und deinem Vorstellungsvermögen eine „Reise ins Unendliche“ zu unternehmen.
- (2) Beschreibe Deine „Reise“ (deine Vorstellungen, Eindrücke ...)
- (3) Welchen der beiden Aussagen stimmst du nun eher zu?
  - (i) „Was ist schon ein Mensch im Unendlichen? ... Ein Nichts.“
  - (ii) Gerade die Fähigkeit des Menschen, immer weiter ins Unendliche einzudringen, zeigt die Größe und Würde des Menschen.

## Welt - Mensch -Gott



[Abbildung 4: Welt - Mensch - Gott]

Arbeitsauftrag:

Nimm Stellung zu folgender Einordnung der Stellung des Menschen: die Endlichkeit der ihn umgebenden Welt, die potentielle Unendlichkeit des Menschen und die aktuelle Unendlichkeit Gottes.

## Fragebogen zum Abschluss

Wie versprochen folgt am Ende dieser Unterrichtseinheit keine Arbeit. Trotzdem möchte ich erfahren, was ihr zum Thema „Unendlichkeit“ nach diesen drei Wochen behalten habt, was ihr von diesem Thema haltet und was ihr gut bzw. schlecht findet. Dazu sollt ihr diesen Fragebogen bearbeiten. Nehmt euch dazu bitte 30 - 40 Minuten Zeit. Die Auswertung wird mir außerdem die Möglichkeit geben zu beurteilen, ob und wie ich dieses Thema in Zukunft gestalten kann. (Stichworte genügen.)

1. a) Ordne die folgenden Begriffe untenstehenden Personen zu:

„Das denkende Schilfrohr“/ eine aktual unendliche Menge/ Grenzwert/ Begeisterung für das Unendliche/ bildliche Darstellung des Unendlichen/ Paradoxie/ potentiell-aktual unendlich.

Aristoteles / Cantor / Cauchy / Escher / Hilbert / Pascal / Zenon

Füge zu jeder Person noch mindestens einen Begriff/eine Bemerkung hinzu!

b) Beschreibe den Unterschied zwischen potentiell und aktual unendlich! (evtl.: Def., Bsp.)

c) Begründe: Ist der Mensch endlich/ potentiell / aktual unendlich?

d) Was ist im Unendlichen anders als im Endlichen? (Bsp.)

e) Beschreibe (knapp) eines der folgenden Probleme mit Lösung.:

Achill und Schildkröte/ Quadrate längs Halbgerade-Gerade/ alternierende Summe/ Hilberts Hotel/ Küstenlänge

f) Fasse eine der beiden Definitionen mit deinen eigenen Worten:

- eine Folge konvergiert genau dann, wenn ...
- eine Menge ist unendlich genau dann, wenn ...

g) Löse eine der drei folgenden Aufgaben:

- Zeige mathematisch sauber, dass die Menge  $g$  der geraden Zahlen  $\{ 0, 2, 4, 6, 8, \dots \}$  gleichmächtig ist zu den natürlichen Zahlen  $N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$ .
- Bestimme den Grenzwert der Folge der Längen der Cantorkurven (beginne mit  $C_0 = 1$ ; dann wird immer das mittlere Drittel entfernt: siehe auch das Aufgabenblatt zur Geometrie.)
- Bestimme die Grenzwerte der Folgen der Längen/ der Flächeninhalte bei den Sierpinski-Dreiecken;

2. a) Was hat dir bei der Behandlung der „Unendlichkeit“ gut/ weniger gut gefallen?

(einzelne Stunden / Gruppenarbeit / mathematische Probleme / Traumreise / philosophische Aussagen / fächerverbindender Unterricht / ...)

b) Was du schon immer sagen wolltest/ Kritik / Anregungen fürs nächste Mal/ was Du vermisst hast ...: