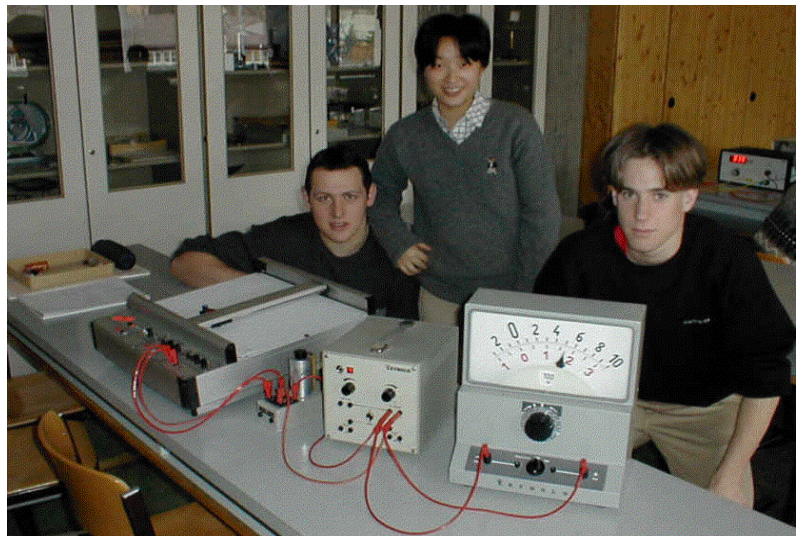


3. Praktikum im 02/2001: Auf- und Entladung eines Kondensators

1. Mitglieder der Arbeitsgruppe

Stephan Schmidle,
Ling Gong,
Martin Keller
(von links)



2. Theoretische Betrachtung

2.1 Mathematische Vorbemerkungen

Um die Vorgänge verstehen zu können, wird erst die Eulersche Zahl e eingeführt.

Diese erhält man z.B. durch die Grenzwertbetrachtung der Funktion:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Man glaubt, dass diese Funktion für $n \rightarrow \infty$ gegen 1 laufen müsste, da $1/n$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 läuft. Doch sie nähert sich der Zahl $e = 2,71828\dots$ an.

Diese Zahl ist insbesondere bei Wachstums- und Zerfallsprozessen zu finden

(z.B.: $f(x) = e^x$ oder $f(x) = e^{-x}$).

Die Ableitung von Funktionen mit der Basis e ist gleich der Funktion selbst:

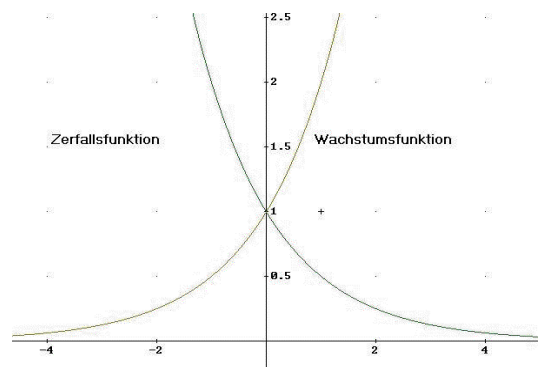
Mit der Kettenregel lässt sich folgen:

$$f(x) = e^x \text{ und } f'(x) = e^x$$

$$f(x) = a \cdot e^{-kx} \Rightarrow f'(x) = -k \cdot a \cdot e^{-kx} = -k \cdot f(x)$$

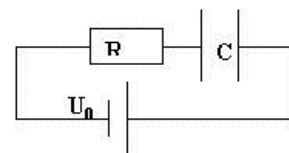
Die Stammfunktion ist somit

$$f(x) = a \cdot e^{-kx} \Rightarrow F(x) = -\frac{a}{k} \cdot e^{-kx}$$



2.2 Schaltskizze und Differentialgleichung

Für unser Praktikum gehen wir von folgendem Aufbau aus: Ein Widerstand R und ein Kondensator C sind in Reihe geschaltet. Beim Aufladevorgang wird die Spannung U_0 angelegt, beim Entladevorgang wird kurzgeschlossen ($U_0 = 0$).



In Reihe geschaltete Spannungen addieren sich zur Gesamtspannung U_0 . Somit folgt hier:

$$U_0 = U_C + U_R$$

Für die Spannung im Kondensator gilt: $U_C = \frac{Q}{C}$

Für die Spannung am Widerstand gilt (Ohmsches Gesetz):

$$U_R = R \cdot I$$

Wir wissen zusätzlich: $I = \dot{Q}$

Zusammen ergibt sich:

$$U_0 = U_C + U_R \Rightarrow U_0 = \frac{Q}{C} + R \cdot I \Rightarrow U_0 = \frac{Q}{C} + R \cdot \dot{Q}$$

2.3 Entladevorgang

- Der Kondensator wird aufgeladen und anschließend wird der Versuchsaufbau kurzgeschlossen.
- Jetzt ist $U_0 = 0$, da keine „äußere Spannung“ anliegt.
- Da der Kondensator aufgeladen ist und beim Kurzschließen keine Ladungen verliert, treibt er nun die Ladungen an und ist somit die Spannungsquelle U_C .
- Über den Widerstand R fließen Ladungen, weshalb sich der Kondensator entlädt und die Ladungen auf seinen Platten abnehmen.
- Die Spannung U_C ist also von der Zeit abhängig: $U_C(t)$.
- Der Widerstand ist nun der Verbraucher im Stromkreis, durch den

der Strom $I = \frac{U_R(t)}{R}$ fließt.

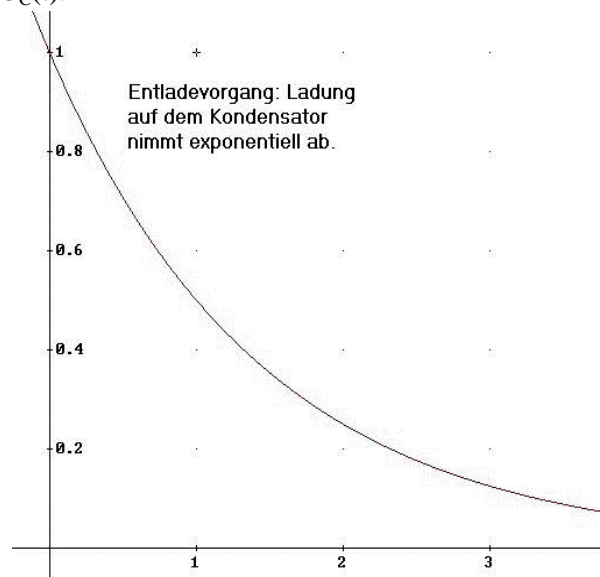
- Da der Strom fließt, nimmt die Ladung auf dem Kondensator C ab, dadurch wird

nach auch $U_C = \frac{Q_C}{C}$ kleiner,

wodurch U_R kleiner wird, wodurch I kleiner wird, wodurch die Ladungsabnahme langsamer wird . . .

Wie bereits erwähnt, ist $U_0 = 0$.

Dies setzen wir in die Gleichung ein: $U_0 = U_C + U_R$



$$0 = U_C + U_R \Rightarrow \frac{Q}{C} + R \cdot I = 0 \Rightarrow \frac{Q}{C} + R \cdot \dot{Q} = 0 \Rightarrow -\frac{Q}{C} = R \cdot \dot{Q} \Rightarrow \dot{Q} = -\frac{Q}{R \cdot C} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot Q$$

Diese DGL lässt sich lösen mit der Funktion:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Für $t = 0$ ergibt sich: $Q(0) = Q_0$

also:

$$Q(0) = Q_0 \cdot e^{-\frac{0}{RC}} = Q_0 \cdot e^0 = Q_0$$

Somit gilt:

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$$

Es gilt also für $I = \dot{Q}$: $I(t) = \dot{Q}(t) = Q_0 \cdot \left(-\frac{1}{RC}\right) \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} = -\frac{U_0}{C} \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} = -I_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$

2.4 Halbwertszeit

Eigenschaft der Zerfallsfunktion: In jeweils selben Zeiträumen zerfällt der selbe Anteil der Ausgangsmenge. Nach der Halbwertszeit T_H ist noch die Hälfte, nach $2 T_H$ noch ein Viertel . . . vorhanden.

Aus unserer Funktion bestimmen wir mit dem Ansatz :

$$Q(T_H) = \frac{Q_0}{2}$$

die Halbwertszeit zu

$$T_H = R \cdot C \cdot \ln 2$$

2.5 Aufladevorgang

Beim Aufladevorgang liegt die Spannung U_0 am Stromkreis an.

Somit gilt hier: $U_0 = U_R + U_C = R \cdot I + \frac{Q}{C} = R \cdot \dot{Q} + \frac{Q}{C} \Rightarrow \dot{Q} = U_0 - \frac{Q}{R \cdot C}$

$$Q(t) = Q_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

die Lösung dieser DGL ist:

$$t \rightarrow \infty \text{ geht } Q(t) \rightarrow Q_0,$$

Dabei gilt: Für

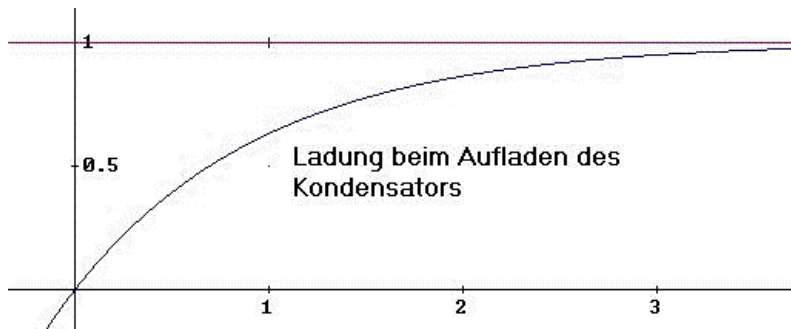
dies stellt die Ladung des Kondensators im Endzustand dar.
Daraus lassen sich folgende Größen bestimmen:

$$U_C(t) = \frac{Q}{C} = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad \text{mit} \quad U_0 = \frac{Q_0}{C},$$

wobei U_0 die Spannung der Spannungsquelle angibt.

$$U_R = U_0 - U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I(t) = \dot{Q} = \frac{Q_0}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{mit} \quad \frac{Q_0}{RC} = \frac{U_0}{R} = I_0, \text{ was die Stromstärke zu Anfang angibt.}$$



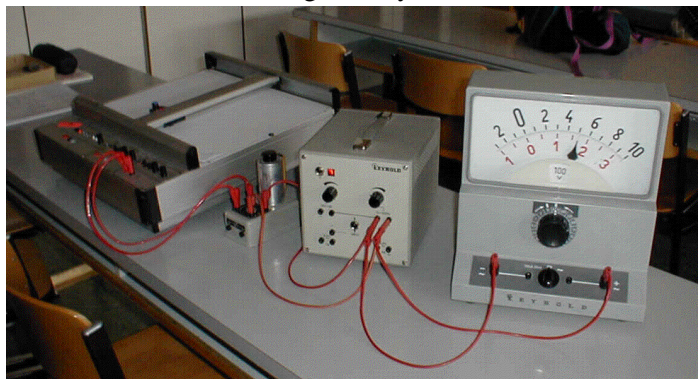
3. Eigentliches Praktikum

3.1 Versuchsfragestellung

- Nachweis exponentiellen Wachstums und Zerfalls der verschiedenen Größen (z.B. Spannung U , Stromstärke I , Ladung Q ...) mit Hilfe der Meßzeichnungen des y-t-Schreibers
- Bestimmung verschiedener Halbwertszeiten anhand der Zeichnungen und Vergleich mit theoretisch errechneten Werten

3.2 Versuchsaufbau

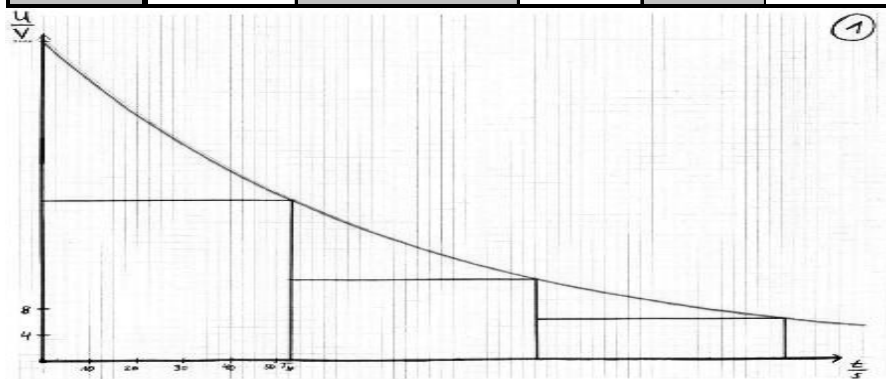
y-t-Schreiber; Kondensator;
Spannungsquelle und daran
Spannungsmessgerät (von links)



3.2 Versuchsaufzeichnungen

Versuch 1:

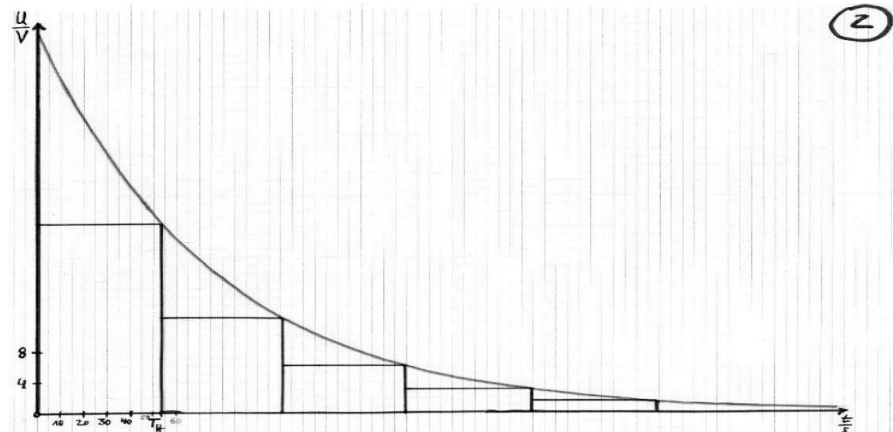
Teil-NR	y/U-Achse	v in x/t-Richtung	R_{ges}	$C_{\text{kon.}}$	U_0
1	2 V/cm	2 mm/s	2 M Ω	40 μ F	50 V



$T_{1/2}$ (Pra.)	$T_{1/2}$ (Th.)	Abw.	$T_{1/4}$ (Pra.)	$T_{1/4}$ (Th.)	Abw.	$T_{1/8}$ (Pra.)	$T_{1/8}$ (Th.)	Abw.
53 s	56 s	5%	106 s	111 s	5%	158 s	166 s	5%

Versuch 2:

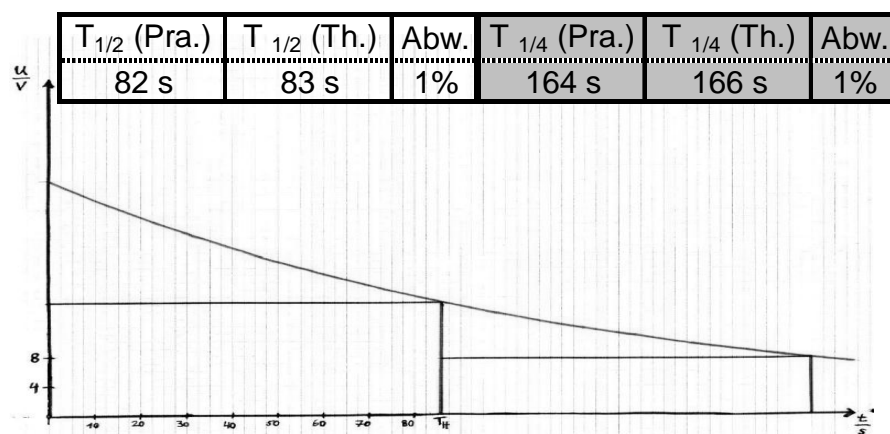
Teil-NR	y/U-Achse	v in x/t-Richtung	R_{ges}	$C_{\text{kon.}}$	U_0
2	2 V/cm	1 mm/s	2 M Ω	40 μ F	50 V



$T_{1/2}$ (Pra.)	$T_{1/2}$ (Th.)	Abw.	$T_{1/4}$ (Pra.)	$T_{1/4}$ (Th.)	Abw.	$T_{1/8}$ (Pra.)	$T_{1/8}$ (Th.)	Abw.
54 s	56 s	4%	107 s	111 s	4%	159 s	166 s	4%

Versuch 3:

Teil-NR	y/U-Achse	v in x/t-Richtung	R_{ges}	$C_{\text{kon.}}$	U_0
3	2 V/cm	2 mm/s	3 M Ω	40 μ F	35 V



3.3 Fehlerquellen

- ⇒ Meßungenauigkeiten bei der Bestimmung von U_0
- ⇒ Zeichenstift des y-t-Schreibers konnte nicht fest genug fixiert werden \Rightarrow leicht fehlerhafte Aufzeichnung durch den Schreiber
- ⇒ Ablesefehler bei der Entnahme der Daten aus den Schaubildern

3.4 Kommentar

Trotz der Fehler sind die aus dem Praktikum gewonnenen Daten für die Halbwertszeiten den theoretischen (errechneten) Werten sehr nahe. Mit der Bestimmung der Halbwertszeiten haben wir auch bestätigt, dass der Rückgang der Spannung am Kondensator einem exponentiellen Zerfall gleicht.

Der erste Versuch musste zwar wiederholt werden, da die Gruppe Eike/ Boris/ Yi die Stromversorgung durch ihren Versuch unterbrochen hat. Dennoch verlief das Praktikum insgesamt harmonisch ab und auch die Ergebnisse sind sehr zufriedenstellend.