

# Fehlerrechnung

## 1.) Vorüberlegung

Aufgabe und Ziel der Physik ist es, die Objekte der Natur zu beobachten und ihre Eigenschaften, Zustände und Zustandsänderungen zu beschreiben. Dabei begnügt sie sich nicht mit qualitativen Angaben, sondern sucht immer quantitative Aussagen zu gewinnen, indem sie die gleichartigen Eigenschaften zweier Objekte vergleicht, oder indem sie gleichartige Ereignisse zählt.

In vielen Fällen macht man sich die Gesetzmäßigkeiten komplizierter Vorgänge zunutze und berechnet die zu messende Größe aus einer Gleichung. Bei vielen Messungen wird die Messung der Meßgröße in die Messung einer Länge (Ablese eines Zeigerausschlages auf einer Skala) übersetzt (z.B. Strommesser, Spannungsmesser, Uhr, Kraftmesser, Thermometer).

Die Messung einer physikalischen Größe bedeutet also den Vergleich mit einer Einheit dieser Größe. Wird dieser Vergleich unter gleichen Bedingungen wiederholt vorgenommen, so werden die Meßwerte voneinander, also auch von dem zu erwartenden wahren Wert der Meßgröße abweichen. Die Aufgabe besteht dann darin, aus den Meßwerten den bestmöglichen Schätzwert für den wahren Wert der Meßgröße, sowie ein Maß für die Unsicherheit des Schätzwertes zu ermitteln. Das Meßergebnis wird dann aus der Angabe dieses Schätzwertes und seiner Unsicherheit bestehen

## 2.) Messung

Jede physikalische Messung ist mit Fehlern behaftet:

$$\text{Meßwert} - \text{Meßunsicherheit} < \text{Wahrer Wert} < \text{Meßwert} + \text{Meßunsicherheit}$$

**Systematische Fehler :** Systematische Fehler sind entweder systematisch größer oder systematisch kleiner als der tatsächliche Meßwert. Ursachen für systematische Fehler:

- die zur Messung verwendeten Geräte sind falsch geeicht
- Probleme beim angewendeten Meßverfahren
- während der Messung ändern sich die Meßbedingungen
- Diese Fehler sind vermeidbar!

**Zufällige Fehler :** Selbst bei völliger Ausschaltung aller systematischen Fehler erhält man bei mehrmaliger Messung der gleichen physikalischen Größe nie genau übereinstimmende Meßergebnisse. Diese Abweichung bezeichnet man als zufällige Fehler.

- Zufällige Fehler gehorchen den Gesetzen der Statistik.
- Beispiele: subjektives Ablesen, Parallaxe, Interpolation, Extrapolation, Bruchteile von Skalen, Temperaturschwankung, Luftdruckschwankung
- unvermeidbar, aber verringert durch sorgfältiges Arbeiten und mehrfaches Messen & Fehlerrechnung

### Absoluter Fehler – relativer Fehler :

- Der absolute Fehler  $\Delta x$  ist gleich der Abweichung des Meßwertes vom Mittelwert.
- Der relative Fehler wird als Verhältnis aus dem absoluten Fehler und dem tatsächlichen Wert angegeben:  $\Delta x/x$ .

## Fehlerrechnung

### Fehlerabschätzungen Einmaliges Messen:

Fehlerabschätzung bei nur einer Messung:

- Hälfte eines Skalenteiles
- Meßgeräte: Güteklassen 1.0 = 1% vom Endwert, 1.5 = 1.5 % vom Endwert)

### Fehlerabschätzungen mehrmaliges Messen:

Führen wir  $n$  Messungen einer physikalischen Größe durch, so bezeichnet man die  $n$  Messungen in der Statistik als eine **Stichprobe**, die einzelnen Meßergebnisse  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) als **Stichprobenwerte**.

Als Bestwert von  $n$  Messungen  $x_i$  einer physikalischen Größe erhält den Mittelwert, der mit einem Fehler behaftet ist.

### Mittelwert

Bei  $n$  Messungen ist das arithmetische Mittel ist durch  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$  gegeben.

## Standardabweichung

Als Maß für die Streuung der Einzelwert  $x_i$  um den Mittelwert wird die Standardabweichung der Einzelmessungen (mittlerer quadratischer Fehler der Einzelmessung) angegeben:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left[ (x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \right]}$$

Diese Größe charakterisiert die Verteilung um den Mittelwert.

## Fehler – Vertrauensbereich des Mittelwertes

Den Fehler des Mittelwertes erhält man, indem man die Standardabweichung durch die Wurzel aus der Anzahl der Messungen dividiert. Damit erhält man den Vertrauensbereich des Mittelwertes (bei  $n > 25$  liegen 68% aller

$$\text{Messwerte in diesem Intervall) : } x = \bar{x} \pm \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

## Beispiel

Beispiel:  $n=10$  Messungen einer Seillänge  $l$  ergeben: 80, 81, 81, 80, 81, 80, 79, 78, 80, 82 cm

Es folgt dann:

- Mittelwert :  $\bar{l} = 80,2 \text{ cm}$
  - empirische Standardabweichung:  $s_l = 1,13 \text{ cm}$  (Schätzwert für den Fehler der Einzelmessung)
  - Schätzwert für den Fehler des Mittelwertes :  $\frac{s_l}{\sqrt{10}} = 0,4 \text{ cm}$
  - 68%-Vertrauensbereich für den Mittelwert:  $l = (80,2 \pm 0,4) \text{ cm}$
  - Absoluter Fehler:  $\Delta l = 0,4 \text{ cm}$
  - Relativer Fehler:  $\Delta l / l = 0,5\%$  (Fehlerangabe in % oder ‰)
- (Achtung: Signifikante Stellen: nicht  $(12,34982143 \pm 2,345676) \text{ m}$ , sondern  $(12 \pm 3) \text{ m}$  oder  $(12,3 \pm 2,4) \text{ m}$ )

## Fehlerfortpflanzung:

Falls die Messgrößen  $x$ ,  $y$  und  $z$  in eine Formel münden :  $a(x, y, z) = c \cdot x^r \cdot y^s / z^t$ ,

pflanzt sich der Fehler nach folgenden Gesetz fort :  $\frac{\Delta a}{a} = |r| \frac{\Delta x}{x} + |s| \frac{\Delta y}{y} + |t| \frac{\Delta z}{z}$ .

Beispiel :  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$ ;  $\frac{\Delta m}{m} = 4\%$ ;  $\frac{\Delta D}{D} = 3\%$   $\Rightarrow$  Fehler von  $m/D$  : 7%, Fehler von  $T$  : 3,5%

## Vergleich mit dem theoretischen Wert

Man nimmt den Messwert mit seinem Fehlerbereich und überprüft, ob der theoretische Wert innerhalb des Vertrauensbereiches liegt.

## Beispiel:

$T_{\text{Theorie}} = 0,90 \text{ s}$  und

aus den Messwerten:  $T_{\text{Mittel}} = 0,85 \text{ s}$ ,  $\Delta T / T = 7\%$ , also  $\Delta T = 0,06 \text{ s}$

Der theoretische Wert liegt damit innerhalb des Vertrauensbereich.

**"Im Rahmen der Messgenauigkeit wurde der theoretische Wert bestätigt."**

Quellen :

<http://iva.uni-ulm.de/physik/repetitorium/fehlerrechnung/inhalt.html>

<http://www.we.fh-osnabrueck.de/fbwe/vorlesung/edv1/statx.html>

<http://www.ph2.physik.uni-goettingen.de/a-prakt/fehlerrechnung.htm>