Induktion

1.) Faradays Induktionsgesetz

Die zentrale Formel dieser Einheit wurde von Michael Faraday in der folgenden Form geschrieben:

$$\boxed{U_{induziert} = -n \cdot \dot{\Phi}}$$

Wir werden uns dem Verständnis dieser Formel schrittweise nähern.

2.) Der magnetische Fluß Φ

Faraday definierte folgende Größe und bezeichnet sie als magnetischen Fluß:

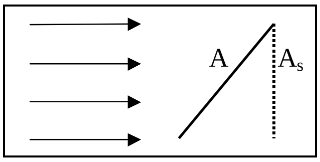
Wird eine Fläche A_s senkrecht von magnetischen Feldlinien eines konstanten B-Feldes durchsetzt, so ist der magnetische Fluß durch folgende Gleichung gegeben: $\boxed{\Phi = B \cdot A_s \qquad [\Phi] = 1Tm^2}$.

Faraday beschrieb diese Größe sehr anschaulich als Feldlinienzahl:

- je größer B, desto „dichter" liegen die Feldlinien;
- je größer die senkrechte Fläche, desto mehr Feldlinien liegen darin;

Bsp.: Eine kreisförmige Leiterschleife mit Durchmesser 10 cm wird von einem B-Feld der Stärke 0,5 T senkrecht / parallel / im Winkel von 45° durchsetzt: $A = \pi \cdot r^2 \approx 7{,}85 \cdot 10^{-3} m^2$

- senkrecht: $A_s = A \Rightarrow \Phi = B \cdot A = 3{,}9 \cdot 10^{-3} Tm^2$
- parallel: $A_s = 0 \Rightarrow \Phi = 0$
- 45°: $A_s = A \cdot \cos 45° \Rightarrow \Phi = B \cdot A \cdot \cos 45° = 2{,}8 \cdot 10^{-3} Tm^2$



Faradays Induktionsgesetz begründet somit die Entstehung einer Induktionsspannung in einer Leiterschleife mit der Änderung der Feldlinienzahl, also $\dot{\Phi}$, die Ableitung des magnetischen Flusses verursacht diesen Effekt.

Dabei sind gemäß der Produktregel zwei Komponenten zu unterscheiden:

$$U_{induziert} = -n \cdot \dot{\Phi} = -n \cdot (\dot{B} \cdot A_s + B \cdot \dot{A}_s)$$

- Induktionsspannung entsteht aufgrund von **Magnetfeldänderung**
- Induktionsspannung entsteht aufgrund von **Flächenänderung**

3.) Induktion durch Flächenänderung

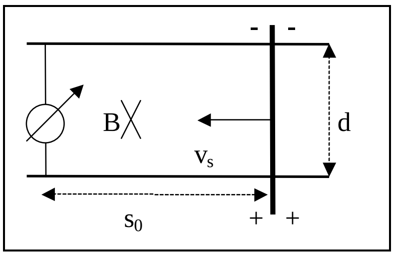
In einem magnetischen Feld B werden folgende Experimente durchgeführt.

Exp. 1: Ein Leiter wird auf einer Schiene senkrecht zu B bewegt.
Exp. 2: Eine Leiterschleife wird gedreht.
Exp. 3: Eine Leiterschleife wird aus dem B-Feld herausgezogen.
Exp. 4: Eine Leiterschleife wird vergrößert.

Jedesmal läßt sich eine Induktionsspannung mit einem Meßverstärker nachweisen.

Erklärungsmöglichkeit 1: Faraday erklärt dies durch (Anzahl der Windungen: n = 1): $U_{induziert} = -B \cdot \dot{A}_s$

Erklärungsmöglichkeit 2: Wir können die Induktionsspannung, die durch **Bewegung von Leitern** erzeugt wird, ebenso mithilfe der **Lorentzkraft** nachvollziehen:

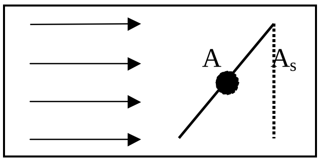


zu Exp. 1: Bewegt sich ein Leiter mit der Geschwindigkeit v_s senkrecht zum B-Feld, so wirkt auf seine Elektronen die Lorentzkraft $F_L = ev_sB$, wobei die Kraftrichtung mit der Drei-Finger-Regel festgelegt ist.
Auf einer Leiterseite entsteht ein Elektronenüberschuß, auf der anderen ein Mangel, ein elektrisches Spannung entsteht, bis die elektrische Kraft - die durch die Spannung entsteht - die Lorentzkraft kompensiert:

$$F_L = F_{el} \Rightarrow ev_sB = e\frac{U_{ind}}{d} \Rightarrow U_{ind} = B \cdot v_s d$$

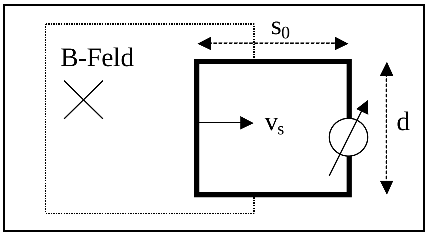
Alternativ lässt sich dies durch Faradays Gesetz über Flächenänderung berechnen:
Die Fläche zwischen Leiter, Schienen und Spannungsmesser ist rechteckig und läßt sich wie folgt berechnen:

$$A = s \cdot d \quad \text{mit } s = s_0 - v_s t \Rightarrow \dot{s} = -v_s \Rightarrow \dot{A} = -v_s d \Rightarrow U_{ind} = -B\dot{A} = Bv_s d$$



zu Exp. 2: Wird eine Leiterschleife der Fläche A im B-Feld gedreht, so bewegen sich wiederum Elektronen im Magnetfeld und auf diese wirkt die Lorentzkraft. Kürzer geht es mit Faradays Formel: die senkrechte Fläche A_s verändert sich während der Drehung: $A_s = A \cdot \cos\alpha$.
Bei konstanter Winkelgeschwindigkeit
$\omega : \omega = \frac{\alpha}{t} \Rightarrow A_s = A \cdot \cos(\omega t) \Rightarrow \dot{A}_s = -\omega A \cdot \sin(\omega t)$

Also wird folgende Spannung induziert: $U_{ind} = -B\dot{A}_s = BA \cdot \omega \sin(\omega t)$
Auf diese Art wird **Wechselspannung** induziert!



zu Exp. 3: Eine rechteckige Leiterschleife wird senkrecht zum B-Feld bewegt: $U_{ind} = 0$, da sich die vom B-Feld durchsetzte Fläche nicht ändert. Erreicht die Leiterschleife den Rand des B-Feld, so wird die von B durchsetzte Fläche kleiner:

$$A = s \cdot d \quad \text{mit } s = s_0 - v_s t \Rightarrow \dot{s} = -v_s \Rightarrow \dot{A} = -v_s d \Rightarrow U_{ind} = -B\dot{A} = Bv_s d$$

zu Exp. 4: wie bei 1-3 muß die Änderungsrate der Fläche bekannt sein.

4.) Induktion durch Magnetfeldänderung

Bsp. 1: Der Sonnenwind verändert das Magnetfeld der Erde und kann „magnetische Stürme“ verursachen. Dadurch kann es zu Induktionsphänomenen in Überlandleitungen kommen - im Extremfall 5 V/ km!
Bsp. 2: Ein Dauermagnet nähert sich rasch einer Leiterschleife: ein Meßverstärker registriert einen Spannungsstoß.

Faraday erklärt dies durch: $U_{ind} = -\dot{B}A_s$

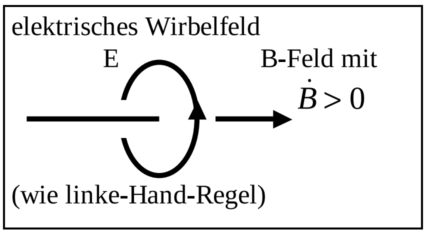
Exp.: In einer großen Feldspule (n=16 000; Querschnitt A = 35 cm²; Länge l = 30 cm) befindet sich eine kleine Induktionsspule (n = 2000; A = 30 cm²; l = 10 cm), wobei beide Achsen parallel verlaufen.

- an die Feldspule wird ein Erregerstrom I_{err} = 0, 1 A angelegt, dadurch entsteht ein B-Feld: $B = \mu_0 \mu_r \frac{n}{l} I_{err}$ Die Induktionsspule zeigt dabei keine Spannung an, da sich das B-Feld nicht ändert.
- an der Feldspule wird der Strom konstant in 2s von 0 auf 0,1 A erhöht:

  $\dot{B} = \mu_0 \mu_r \frac{n}{l} \dot{I}_{err}$, in diesem Fall ist die Änderung des Stroms, $\dot{I}_{err}$, gerade $\frac{0{,}1A}{2s}$

  $$U_{ind} = -n_{ind} \dot{B} A_{ind} = -n_{ind} (\mu_0 \mu_r \frac{n_{Feld}}{l_{Feld}} \dot{I}_{err}) A_{ind} \approx -0{,}02V$$

Um die Induktionsspannung noch zu vergrößern, kann man die Spulendaten verändern oder die Stromänderung schneller durchführen: z. B. einfach durch **Ein- und Ausschalten**.

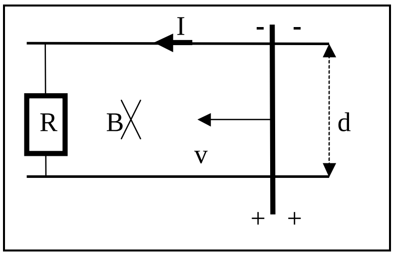


Da bei diesem Induktionsphänomen die Elektronen ruhen, ist die Lorentzkraft nicht verantwortlich. In einem Experiment haben wir nachgewiesen:

- zusätzlich zum E-Feld, das bei positiven Ladungen beginnt und bei negativen endet
- gibt es ein **elektrisches Wirbelfeld** - ohne Anfang und Ende - das kreisförmig sich ändernde B-Feldlinien umgibt.

Im obigen Experiment verlaufen die B-Feldlinien achsenparallel. Da sich diese mit dem Erregerstrom ändern, bildet sich ein elektrisches Wirbelfeld, was auf die Elektronen in der Induktionsspule wirkt und dort die Induktionsspannung erzeugt.

5.) Das Vorzeichen im Faraday-Gesetz: das Lenzsche Gesetz



In (3.) wird in Exp. 1 der Leiter im B-Feld bewegt und erzeugt dabei einen Induktionsspannung: $U_{ind} = -B\dot{A} = Bv_s d$.
Schließt man über einen Widerstand R kurz, fließt ein Induktionsstrom:
$I_{ind} = \frac{U_{ind}}{R}$.
Dieser Strom durchfließt wiederum den Leiter, der erfährt im B-Feld eine Kraft - beschleunigt?, ein höherer Strom?, stärkere Kraft?, noch größerer Strom ...: ein Perpetuum mobile?

Dabei wäre der Energieerhaltungssatz verletzt: immer mehr Bewegungs- und elektrische Energie wird erzeugt!

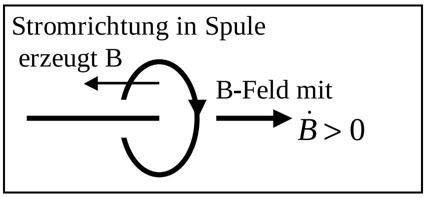
Überprüfen wir mit der Drei-Finger-Regel die Kraft, die der Induktionsstrom im Leiter erzeugt: sie zeigt nach rechts, bremst den Leiter also ab, der Induktionsstrom wird also kleiner.
Der Energiesatz (EES) wird dadurch nicht verletzt:
Um die Bewegung gegen die Lorentzkraft $F = IdB$ aufrechtzuerhalten, müssen wir die Leistung
$P_{mech} = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} = Fv = IdBv$ erbringen.
Dadurch erzielen wir im „Generator" die elektrische Leistung: $P_{el} = U_{ind} I_{ind} = dvBI$, also dieselbe, die wir gegen die Lorentzkraft mechanisch aufbringen müssen.

Aus dem EES folgt das Lenzsche Gesetz, das im Faraday-Gesetz durch das Vorzeichen beinhaltet ist:

Lenzsches Gesetz: *Die Induktionsspannung ist so gepolt, dass der Induktionsstrom seiner Ursache entgegenwirkt.*

In diesem Beispiel: der Induktionsstrom bewirkt eine Lorentzkraft nach rechts, die der Ursache von Strom / Spannung, der Bewegung nach links, entgegenwirkt, die Bewegung also verlangsamt!

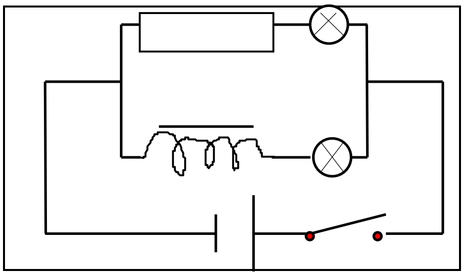
Im Exp. in (4.) mit Feld- und Induktionsspule läßt sich die analog anwenden.



- bei einem Stromanstieg in der Feldspule wächst das B-Feld und erzeugt in der Induktionsspule eine Induktionsspannung die so gepolt ist, dass beim Kurzschließen der Induktionsstrom in der Induktionsspule ein B-Feld erzeugt, was der Ursache, dem Anstieg des B-Feldes in der Feldspule, entgegenwirkt: es ist entgegengesetzt gepolt und schwächt den Anstieg von B ab.
- ist ein Stromabfall in der Feldspule die Ursache der Induktion, so ist die Polung entgegengesetzt, damit das B-Feld in der Induktionsspule zum äußerem B-Feld gleichgerichtet ist und damit dem Abfall des B-Feldes entgegenwirkt.

Technische Anwendung: **Wirbelstrombremse**
z. B.: Schwingt eine Metallscheibe durch einen Magnete, so werden durch die Flächenänderung Induktionsströme erzeugt, die ihrer Ursache, dem Hineinschwingen, entgegenwirken, also die Bewegung abbremst.

6.) Selbstinduktion



Exp.: ***Das verspätete Lämpchen***
Aufbau: Spannungsquelle mit U_1
Parallel liegen:
Spule und Lämpchen L1
Regelbarer Widerstand R und Lämpchen L2
Vorbereitung: R wird so eingeregelt, dass beide Lämpchen gleich hell brennen. Damit fließt in beiden Ästen die gleiche Stromstärke I.
Also ist in beiden Kreisen der Ohmsche Widerstand gleich groß.
Durchführung: Der geöffnete Schalter wird geschlossen.
Beobachtung: Das Lämpchen L2 bei der Spule leuchtet erst mit Verspätung auf, während L1 sofort brennt.
Erklärung: Durch den Einschaltvorgang wird in der Spule eine Induktionsspannung erzeugt, die ihrer Ursache, dem Spannungsanstieg beim Einschalten, entgegenwirkt, den Anstieg also abbremst.

Genauer: $U\uparrow \Rightarrow I\uparrow \Rightarrow B\uparrow$: ein ansteigendes B-Feld (parallel zur Spulenachse) ist kreisförmig von einem elektrischen Wirbelfeld umgeben, das auf die Elektronen der Spule wirkt. Gemäß dem Lenzschen Gesetz fließt dadurch ein Induktionsstrom, der seiner Ursache entgegenwirkt, als ein B-Feld in umgekehrter Richtung - also entgegengesetzte Stromrichtung - erzeugt.
Die Feldspule ist hier zugleich Induktionsspule!!!!

In Formeln: Induktionsspannung: $U_{ind} = -n\dot{B}A = -n\left(\mu_0\mu_r \frac{n}{l}\dot{I}_{err}\right)A = -\left(\mu_0\mu_r \frac{n^2}{l}A\right)\cdot \dot{I}_{err}$

Allgemein: Es gibt einen linearen Zusammenhang zwischen Induktionsspannung und Stromveränderung.

Die Proportionalitätskonstante nennen wir Eigeninduktivität L: $L = -\frac{U_{ind}}{\dot{I}}; [L] = 1\frac{Vs}{A} = 1 Henry$

Somit gilt: $\boxed{U_{ind} = -L\dot{I}}$

Für eine lange Spule läßt sich die Eigeninduktivität aus den Spulendaten berechnen $\boxed{L = \mu_0\mu_r \frac{n^2}{l}A}$

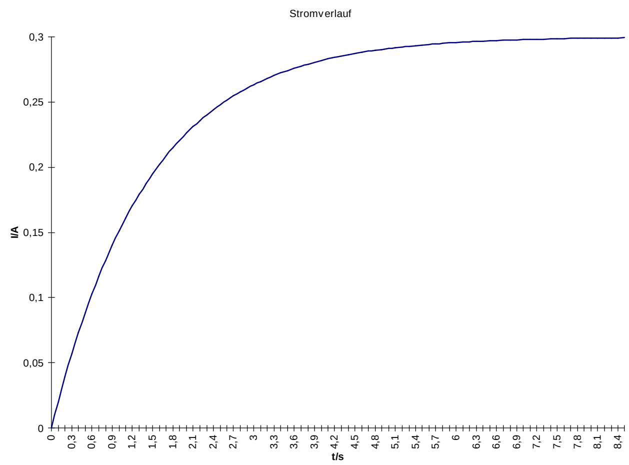
Noch genauer: Wollen wir dieses Experiment - und insbesondere das Verhalten des „verspäteten Lämpchens“, also den Stromverlauf im Spulenast, richtig verstehen, müssen wir wieder die Mathematik bemühen:

Im Spulenast des Stromkreises liegt die äußere Spannung U_1 an.
Die Spule erzeugt die Induktionsspannung U_{ind}.
Also liegt am zweiten Lämpchen L2 (im Spulenast) die Gesamtspannung

$$U(t) = U_1 + U_{ind}(t) = U_1 - L\dot{I}(t) \qquad (1)$$

Folglich fließt im Lämpchen der Strom $$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{U_1 - L\dot{I}(t)}{R} \qquad (2)$$

Der Stromanstieg beträgt folglich: $$\dot{I}(t) = \frac{U_1 - I(t)R}{L} \qquad (3)$$



Zum Zeitpunkt t = 0 gilt:
Da I(0) = 0, gilt:
aus (2) / (1): $U(0) = 0 \Rightarrow U_{ind}(0) = -U_1$
Die Induktionsspannung kompensiert die äußere Spannung.
Aus (3): $\boxed{\dot{I}(0) = \frac{U_1}{L} > 0}$. Ein maximaler Stromanstieg.
Danach: Der Strom I(t) steigt also stark an.
Damit wird aber zugleich der Stromanstieg kleiner ...: $\dot{I} \to 0$,
damit nähert sich der Strom $\boxed{I \to \frac{U_1}{R}}$.
(was im oberen Ast sofort anlag)

Bemerkung: Aus dem Schaubild I(t) kann man somit den Widerstand R und die Eigeninduktivität L berechnen:

- Aus dem Grenzwert des Stroms kann man R bestimmen: $R = \frac{U_1}{I_\infty}$
- Aus der Tangente im Ursprung kann man L bestimmen: $L = \frac{U_1}{\dot{I}(0)}$

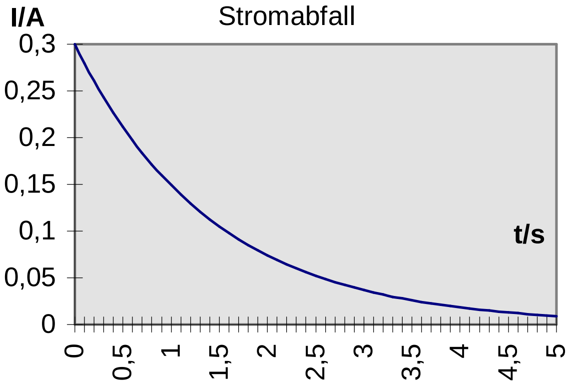
Exakte Lösung für I(t): Die Gleichungen (2) bzw. (3) stellen Differentialgleichungen für I(t) dar.

Sie haben die Lösung: $I(t) = \frac{U_1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ (Asympt. Annäherung von 0 nach U_1/R)

$\Rightarrow \dot{I}(t) = \frac{U_1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$ (Asympt. Annäherung von U_1/L nach 0)

Ausschaltvorgang: Beim Ausschalten verhindert die Spule ein sofortiges Zusammenbrechen des Stromes: Das Lämpchen brennt länger.

Also liegt am zweiten Lämpchen L2 (im Spulenast) die Gesamtspannung (keine äußere Spannung)



$$U(t) = 0 + U_{ind}(t) = -L\dot{I}(t) \qquad (1)$$

Folglich fließt im Lämpchen der Strom

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{-L\dot{I}(t)}{R} \qquad (2)$$

Der Stromanstieg beträgt folglich:

$$\dot{I}(t) = \frac{-I(t)R}{L} \qquad (3)$$

Hier gibt es die Lösung: $I(t) = \frac{U_1}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$ (Asympt. Annäherung von U_1/R nach 0)

$\Rightarrow \dot{I}(t) = -\frac{U_1}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$ (von $-U_1$/L nach 0)

7.) Energie im Magnetfeld

Eine Spule, die nach dem Ausschalten noch die Induktionsspannung $U_{ind(}$(t) und somit den Strom I(t) induziert, gibt folgende elektrische Leistung ab: $P(t) = U_{ind}(t)I(t) = -L\dot{I}(t)I(t)$

Welche Energie gibt sie dabei ab?

Allgemein gilt: $\boxed{P = \dot{W}}$ bzw. $\boxed{W = \int P dt}$

Gesucht ist also die Stammfunktion von P: $W = -\frac{1}{2}LI^2(t) \Rightarrow P = \dot{W} = -\frac{1}{2}L \cdot 2I \cdot \dot{I}$ (Kettenregel).

Damit beträgt die gesamte von der Spule gespeicherte Energie: $W = \int_0^\infty P dt = -\frac{1}{2}L\left[I^2(\infty) - I^2(0)\right]$

Da zu Beginn $I(0)=I_0$ maximal ist, und dann der Strom gegen Null geht,

war in der Spule somit die magnetische Energie $\boxed{W_{mag} = \frac{1}{2}LI_0^2}$ gespeichert.

Wo steckt diese Energie?

- Eine Spule, durch die der Strom I fließt, erzeugt ein B-Feld.
  In diesem magnetischen Feld ist die Energie gespeichert: $W = \frac{1}{2}LI^2$
- Analog: ein Kondensator, an dem die Spannung U anliegt, hat die Energie $W = \frac{1}{2}CU^2$ im elektrischen Feld gespeichert.

Abituraufgaben: **89/3**: (a), (b) ohne Effektivwert; **90/4** (a); (c): Verspät. Lämpchen; **95/4** (a): Hallsonde (b): Einschalten; **96/4** (a):Lorentz; (b): Einschalten;(c): schwer; **97/4** (c): schwer; **98/4** ganz!!!