Arbeitsblatt: Einführung des Logarithmus

Logarithmus als zusätzliche Rechenart

Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) Gesucht ist der erste Summand: $x+3=5 \Leftrightarrow x=5-3$ *Sie lösen die Summe auf, indem Sie* _____

b) Gesucht ist der Minuend: $x-3=5 \Leftrightarrow$ *Sie lösen die Differenz auf, indem Sie* _____

c) Gesucht ist der erste Faktor: $x\cdot 5=15 \Leftrightarrow$ *Sie lösen das Produkt auf, indem Sie* _____

d) Gesucht ist der Dividend: $x\div 3=5 \Leftrightarrow$ *Sie lösen den Quotienten auf, indem Sie* _____

e) Gesucht ist der Radikand: $\sqrt{x}=16 \Leftrightarrow$ *Sie lösen die Wurzel auf, indem Sie* _____

f) Gesucht ist die Basis: $x^2=5 \Leftrightarrow$ *Sie lösen die Potenz nach der Basis auf, indem Sie* _____

g) Gesucht ist der Exponent: $10^x=100 \Leftrightarrow$ *Sie lösen die Potenz nach dem Exponenten auf, indem Sie* _____

Warum wird der Logarithmus eingeführt?

Gesucht ist die Antwort auf die Frage: a (z. B. 10) hoch eine Zahl x ergibt b (z. B. 5): $a^x=b$ *Wie groß ist x?*

Die Antwort lautet: $x=\log_a b$ *(hier also* $x=\log_{10}5=\log 5=0{,}69897..$*, also:* $10^{\log 5}=10^{0{,}69897}=5$ *)*

Def.: $10^x=b \Leftrightarrow x=\log_{10} b$ (Schreiben wir nur „log“, so ist die Basis 10 gemeint!)

Aufgabe: Berechnen Sie damit: $10^x=20$ (100; 0,1; 0,001;10.000) und überprüfen Sie die Lösung!

Folgerung 1: Da $10^x=b \Leftrightarrow x=\log b$ gilt also auch: $\boxed{10^{\log b}=b}$ *(Potenzieren und logarithmieren „heben sich auf“)*

Folgerung 2: Da $10^b=10^b$ gilt auch: $\boxed{b=\log\left(10^b\right)}$ *(Potenzieren und logarithmieren „heben sich auf“)*

Aufgabe: Überprüfen Sie mit dem TR: $10^{\log 5}=5$; $10^{\log 0{,}1}=0{,}1$; $\log(10^4)=4$.

Folgerung 3: Da $10^{\log b}=b$ und da $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$ gilt: $b^x=(10^{\log b})^x=10^{x\cdot\log b}$. *(„**Basistransformation**“ mit dem Logar.)*

Aufgabe: Überprüfen Sie mit dem TR z. B. für x = 2 und b = 3 obige Gleichung.

Logarithmenregeln:

1.) Aus $a^1=a$ folgt: $\boxed{\log_a a=1}$

2.) Aus $u=a^n; v=a^m$ folgt $n=\log_a u; m=\log_a v$.

$\Rightarrow a^{n+m}=a^n\cdot a^m \Rightarrow n+m=\log_a(a^n\cdot a^m)\Rightarrow$

$\boxed{\log_a u+\log_a v=\log_a(u\cdot v)}$

3.) $a^{n-m}=\frac{a^n}{a^m}\Rightarrow n-m=\log_a(\frac{a^n}{a^m})\Rightarrow$

$\boxed{\log_a u-\log_a v=\log_a(\frac{u}{v})}$

4.) $a^{n\cdot m}=(a^n)^m\Rightarrow n\cdot m=\log_a((a^n)^m)\Rightarrow$

$\boxed{m\cdot\log_a u=\log_a(u^m)}$

Aufgabe: Vereinfachen Sie: $\log a+\log a^2$; $\log a^3-\log a^2+\log\sqrt{a}$; $5\log 100-\log 10^{1{,}5}$

Lösen Sie folgende Gleichungen nach x auf: $10^x=2^a$; $10^x=100a$;

Folgerung 4: $a^x=b\Leftrightarrow x=\log_a b\Rightarrow a^{\log_a b}=b\Rightarrow\log\left(a^{\log_a b}\right)=\log(b)\Rightarrow\log_a b\cdot\log(a)=\log(b)\Rightarrow\boxed{\log_a b=\frac{\log(b)}{\log(a)}}$.

Aufgabe: Lösen Sie damit folgende Gleichungen: $2^x=8$; $3^{x+1}=81$; $(\frac{1}{2})^x=4$; *(Logarithmus zu beliebiger Basis.)*

Natürlicher Logarithmus:

Def.: *Zur Basis e = 2,71828.. können Sie ebenfalls den Logarithmus definieren:* $e^x=b\Leftrightarrow x=\log_e b$.

*Wir nennen diesen den **natürlichen Logarithmus** und schreiben statt „$\log_e$“ nun „**ln**“.*

Aufgaben: Berechnen Sie mit dem TR: $x=\ln 10$ $(\ln 0{,}1;\ln 1;\ln e)$; $e^x=1$ $(2;e;3)$; $x=e^{\ln 1}$ $(e^{\ln 0{,}76};e^{\ln 10})$

Folgerung: Sie können von beliebiger Basis a auf die Basis e umrechnen: $a^x=e^{x\cdot\ln a}$.

Aufgaben: Lösen Sie folgende Gleichungen mit „ln“: $2^x=8; 3^{x+1}=81; (\frac{1}{2})^x=4$;

Für „ln“ gelten dieselben Logarithmenregeln: $\ln(u\cdot v)=\ln u+\ln v$; $\ln(\frac{u}{v})=\ln u-\ln v$; $\ln u^n=n\cdot\ln u$

esp.: $3\cdot e^{x-2}=6\Rightarrow e^{x-2}=2\Rightarrow x-2=\ln(2)\Rightarrow x=2+\ln(2)$

Aufgaben: S. 152 / 3 - 10.

Aufgaben beziehen sich auf Lambacher-Schweizer: Analysis Leistungskurs, 2000